Prof. STANISŁAW GARLICKI.

O KONSTRUKCJI INWERSORÓW.

Inwersorem nazywamy przyrząd, złożony z drążków, leżących na jednej płaszczyźnie (lub na płaszczyznach równoległych) i tak ze sobą przegubowo połączonych, że przy zmianie formy przyrządu trzy punkty O, M i N, z których każdy należy do innego drążka, zmieniają swe względne położenie, *pozostając zawsze na jednej prostej i dając stały iloczyn odległości* OM *i* ON. Wartość tego stałego iloczynu nazywamy *potęgą inwersora*; zależnie od tego, czy potęga ta jest dodatnia lub ujemna, t. j. czy punkty M i N leżą po tej samej stronie punktu O, czy po przeciwnych jego stronach, odróżniamy *inwersory hiperboliczne* i *eliptyczne*. Jeżeli unieruchomimy punkt O układu i zmusimy punkt M do opisywania dowolnej figury płaskiej (ograniczonej jedynie skończonemi wymiarami przyrządu), to punkt N opisze figurę przekształconą przez inwersję; — jeżeli np. punkt M opisywać będzie jakiekolwiek koło nieprzechodzące przez punkt O (który jest środkiem inwersji), to punkt N opisze również koło, — jeżeli wszakże koło opisywane przez punkt M przechodzi przez środek inwersji O, to punkt N opisywać będzie prostą. Zapomocą inwersorów możemy więc przekształcić ruch obrotowy na ruch prostolinjowy i nawzajem.

Powszechnie znane są dwa inwersory: sześciodrążkowy *Peaucellier'a* i czterodrążkowy *Hart'a* (Rys. 7 i 5), mniej znany jest inwersor *Perrolaz'a* (fig. 11). Czyżby nie było więcej możliwych inwersorów?, — a jeżeli są, to w ilu istnieją odmianach i jaka jest ogólna zasada ich konstrukcji? — oto pytania, na które zamierzam dać tutaj odpowiedź.

Z podanej wyżej definicji inwersora wynika, że zmiana jego formy zależeć musi od jednego parametru; jeżeli bowiem z trzech punktów O, M, N unieruchomimy dwa którekolwiek, to trzeci również zostanie unieruchomiony. Otóż najprostszemi układami przegubowemi, których odkształcanie zależy od jednego parametru, są *czworoboki przegubowe;* to też każdy inwersor składać się będzie albo z jednego tylko czworoboku przegubowego *(inwersory czterodrążkowe)*, albo z dwóch czworoboków przegubowych, spojonych ze sobą dwiema parami boków przyległych (*inwersory sześciodrążkowe)*.

Jeżeli jednak zrezygnujemy z postulatu jednoparametrowej zmienności formy inwersora, to można będzie wskazać przyrządy znacznie prostszej budowy, bo złożone z *trzech* tylko drążków tak ze sobą przegubowo połączonych, że punkty O, M, N, z których każdy należy do innego drążka, — *o ile będą zmuszone pozostawać na jednej prostej,* — zachowywać będą stały iloczyn odległości OM i ON. Przyrządy takie nazywam *inwersorami niezupełnemi*; ich poprawne działanie wymaga bowiem pewnego dodatkowego urządzenia, zapewniającego spółlinjowość punktów O, M, N.

Inwersory niezupełne mogą być tylko dwóch typów:

Typ A (fig. 1) składa się z drążków OL, LM i LN, połączonych przegubowo w spólnym punkcie L, przytem drążki LM i LN są równej długości $LM = LN = b$, podczas gdy długość a drążka OL jest albo większa od b (inwersor hiperboliczny h_1), albo mniejsza od b

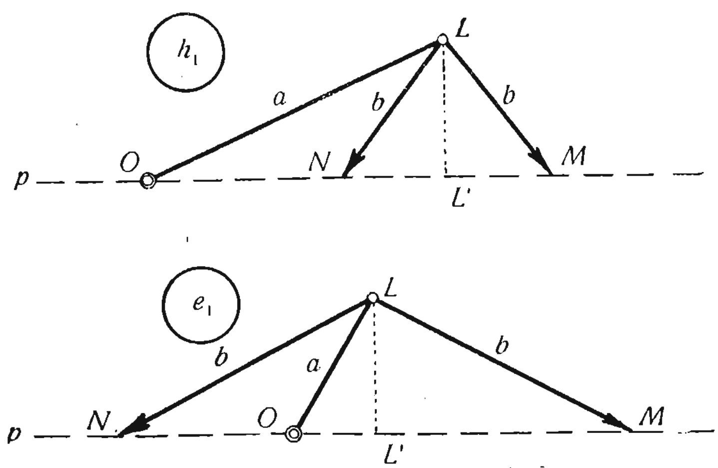

Fig. 1.

(inwersor eliptyczny e_1). — Jeżeli punkty O, M i N leżą na jednej prostej p, a punkt L' jest rzutem prostokątnym punktu L na tę prostą, to w obu przypadkach:

$$OM = OL' + L'M, \qquad ON = OL' - NL',$$

skąd zważywszy, że $L'M = NL'$, znajdziemy

$$OM \cdot ON = OL'^2 - L'M^2 = OL^2 - LM^2 = a^2 - b^2.$$

Typ B (fig. 2) składa się z drążków PQ, PM i QN różnych długości o przegubach P i Q; przytem punkt O jest takim punktem drążka PQ, który go dzieli w stosunku długości PM i QN wewnętrznie (h_2 i e'_2) lub zewnętrznie (h'_2 i e_2), tak, że jeżeli $PM = a$, $OP = b$, to $QN = ma$ i $QO = mb$. Poprawne działanie przyrządu wymaga 1°, aby punkty O, M, N pozostawały na jednej prostej p i 2°, aby w położeniu początkowem drążki PM i QN nie były równoległe. Gdy te dwa warunki są spełnione, to oznaczając literami P' i Q' rzuty punktów P i Q na prostą p, mamy

$$OM = P'M + OP', \qquad ON = Q'N - Q'O.$$

Gdy punkt O leży między punktami P i Q (h_2 i e'_2), to

$$Q'N = m \cdot P'M, \qquad Q'O = m \cdot OP',$$

skąd

$$OM \cdot ON = m\,(P'M^2 - OP'^2) = m\,(PM^2 - OP^2) = m\,(a^2 - b^2).$$

Gdy punkt O leży poza punktami P i Q (h'_2 i e_2), to

$$Q'N = -m \cdot P'M, \qquad Q'O = -m \cdot OP',$$

skąd

$$OM \cdot ON = m\,(OP'^2 - P'M^2) = m\,(OP^2 - PM^2) = m\,(a^2 - b^2).$$

W obu więc przypadkach iloczyn $OM \cdot ON$ ma wartość stałą, — w pierwszym przypadku wartość ta jest dodatnia, gdy $a > b$, — w drugim, — gdy $a < b$. Ze względów praktycznych (dla uniknięcia t. zw. „martwych" położeń) bierzemy zazwyczaj $a < b$; w przy-

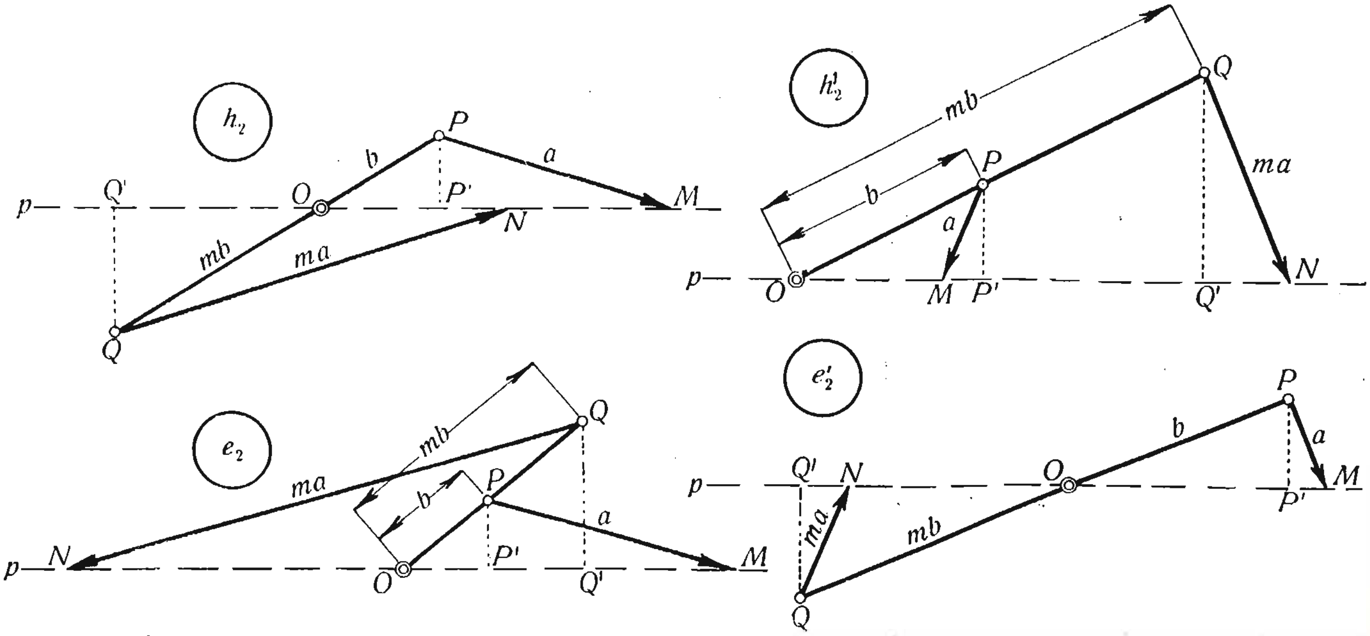

Fig 2.

padku hiperbolicznym, t. j. gdy $OM \cdot ON > O$, punkt O leży wówczas między punktami P i Q (h_2), — w przypadku eliptycznym, t. j. gdy $OM \cdot ON < O$, punkt O leży poza punktami P i Q (e^2).

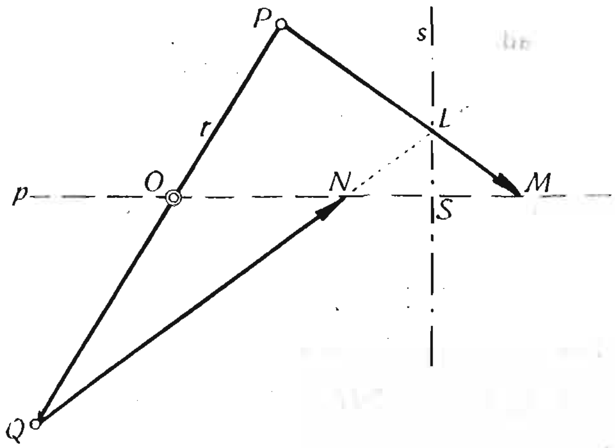

Fig. 3.

Zauważmy, że proste PM i QN tworzą z prostą p kąty spełniające. Stąd wynika następująca ogólna konstrukcja inwersora niezupełnego typu B o danej potędze (dodatniej lub ujemnej): Obrawszy na jakiejkolwiek prostej p (fig. 3) trzy punkty O, M, N w taki sposób, aby iloczyn $OM \cdot ON$ równał się danej potędze, wystawiamy w środku S

odcinka MN prostopadłą s do prostej p i na tej prostopadłej obieramy gdziekolwiek punkt L; łączymy LM i LN, poczem z punktu O prowadzimy jakąkolwiek sieczną r prostych LM i LN; punkty przecięcia P i Q wraz z punktami O, M i N wyznaczają jeden z inwersorów niezupełnych typu B o danej potędze.

Dla danego położenia punktu L na prostej s dwa są szczególnie ważne położenia siecznej r:

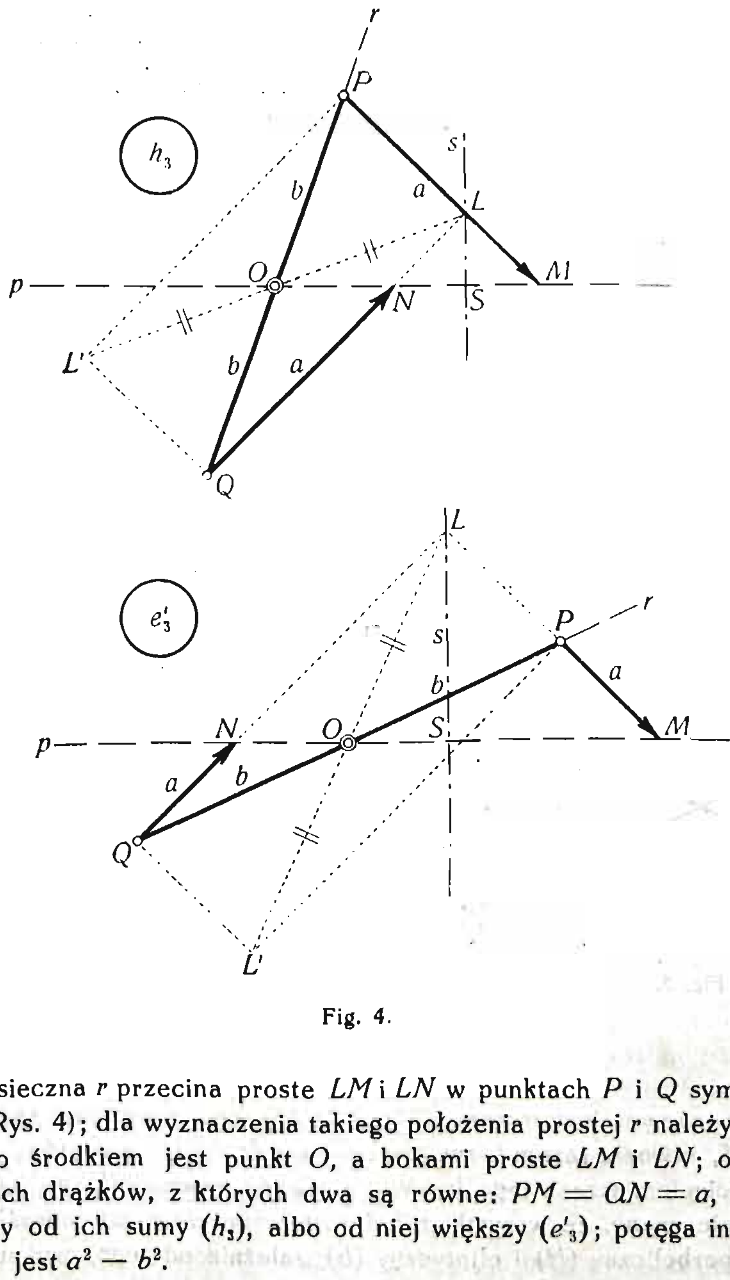

Fig. 4.

1° gdy sieczna r przecina proste LM i LN w punktach P i Q symetrycznych względem punktu O (Rys. 4); dla wyznaczenia takiego położenia prostej r należy zbudować równoległobok, którego środkiem jest punkt O, a bokami proste LM i LN; otrzymany inwersor składa się z trzech drążków, z których dwa są równe: $PM = QN = a$, a trzeci $PQ = 2b$ albo jest mniejszy od ich sumy (h_3), albo od niej większy (e'_3); potęga inwersora w każdym przypadku równa jest $a^2 - b^2$.

2° gdy sieczna r przechodzi przez punkt L; punkty P i Q są wówczas zebrane w tym punkcie; otrzymamy w tym przypadku inwersor niezupełny typu A. (Rys. 1). *Typ A inwersora niezupełnego jest przeto przypadkiem szczególnym typu B.*

Aby teraz z inwersora niezupełnego typu A lub B uczynić inwersor zupełny, trzeba, jak to już zaznaczyliśmy, dołączyć do niego urządzenie, któreby zapewniało spółlinjowość punktów O, M, N. — Otóż najprostszem takiem urządzeniem jest drugi inwersor niezupełny o tej samej potędze; *przez połączenie dwóch inwersorów niezupełnych o tej samej potędze można otrzymać wszystkie możliwe inwersory zupełne tej samej potęgi,* — cztero i sześciodrążkowe.

Połączenie takie można osiągnąć dwoma sposobami:

I sposób da się zastosować tylko do inwersorów niezupełnych typu B. Jakikolwiek inwersor tego typu ustawiamy tak, aby punkty O, M i N leżały na prostej p (fig. 5); figura symetryczna z tym inwersorem względem prostej s, prostopadłej do p w środku S odcinka

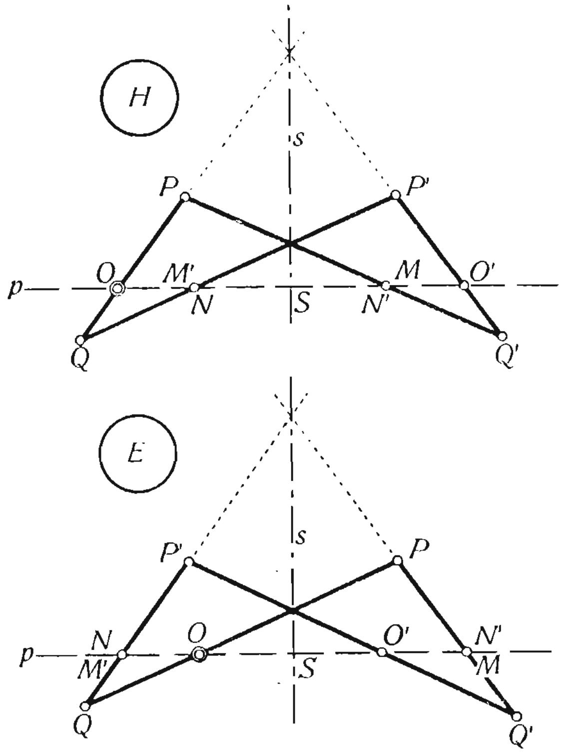

Fig. 5.

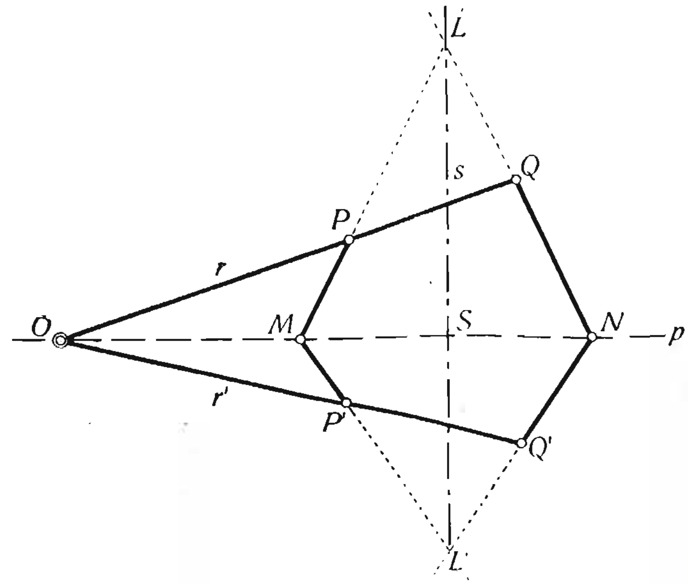

Fig. 6.

MN, będzie takim samym inwersorem $P'Q'O'M'N'$; oba inwersory spojone w punktach $M = N'$ i $N = M'$, utworzą razem t. zw. *przeciwrównoległobok przegubowy* $PQP'Q'$; punkty O, M i N są przecięciem trzech jego boków prostą p, prostopadłą do jego osi symetrji s. Jest to powszechnie znany, ze wszystkich najprostszy *inwersor czterodrążkowy Hart'a-Kempe'go*, zarazem hiperboliczny (H) i eliptyczny (E), zależnie od tego, czy punkt O weźmiemy poza punktami M i N, czy też między niemi. Dodajmy, że nic nie stoi na przeszkodzie, aby prosta p wraz z punktami O, M i N leżała poza czworobokiem $PQP'Q'$, — t. j. aby punkty O, M i N były wzięte na przedłużeniach boków PQ, PQ' i $P'Q$.

II sposób. Dwa inwersory niezupełne, jednakowe lub różne, tego samego typu lub różnych typów, ale zawsze tej samej potęgi, układamy na jednej płaszczyźnie tak, aby punkty O i O', M i M', N i N' parami do siebie przystały i w tych punktach łączymy je przegubowo. W ten sposób otrzymać możemy wszystkie możliwe formy *inwersorów zupełnych sześciodrążkowych.* Ogólna metoda konstrukcji inwersora zupełnego tego typu jest następująca (fig. 6): Na jakiejkolwiek prostej p obieramy znowu punkty O, M i N w taki sposób, aby iloczyn $OM \cdot ON$ równał się danej potędze (dodatniej lub ujemnej); w środku S odcinka MN wystawiamy prostopadłą s do prostej p i obieramy gdziekolwiek na tej prostopadłej dwa punkty L i L' różne od siebie wzajemnie i od punktu S; każdy z tych dwóch punktów łączymy z punktami M i N, — poczem wyprowadzamy z punktu O jakąkolwiek sieczną $r = OPQ$ prostych LM i LN i jakąkolwiek sieczną $r' = OP'Q'$ prostych $L'M$ i $L'N$. Układ przegubowy, złożony z dwóch inwersorów niezupełnych $PQOMN$ i $P'Q'OMN$,

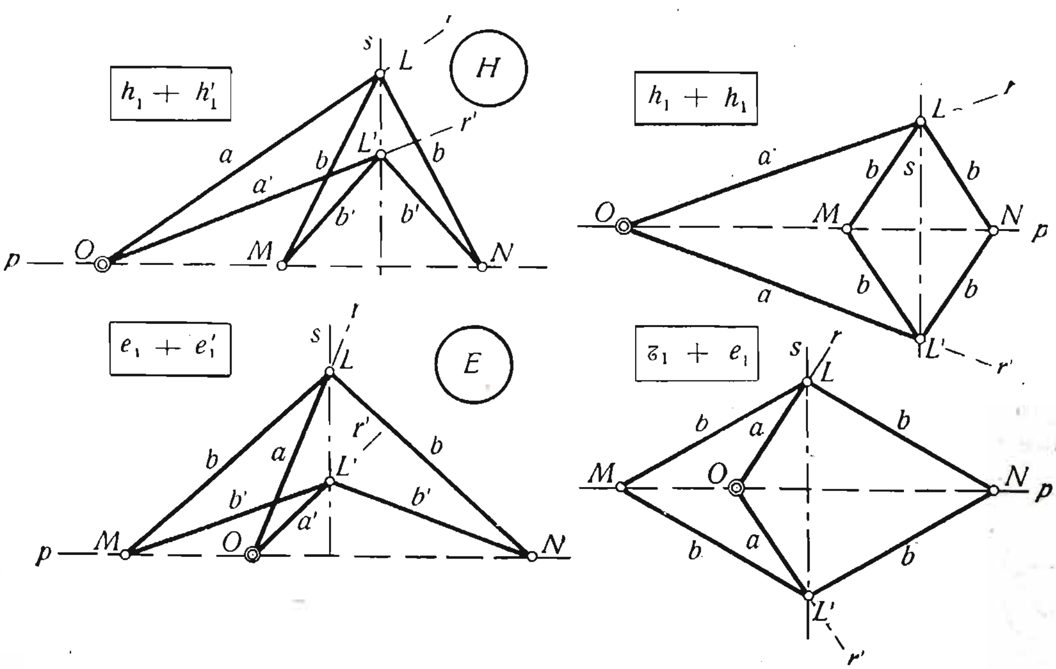

Fig. 7.

połączonych przegubowo w punktach O, M i N, jest najogólniejszym inwersorem sześciodrążkowym; — układ ten można zresztą rozważać także, jako złożony z dwóch czworoboków przegubowych $OPMP'$ i $OQNQ'$, które mają po dwa przyległe boki parami spojone: OP z OQ i OP' z OQ'. Od wyboru punktów L i L' na prostej s i siecznych r i r', wychodzących z punktu Q zależeć będzie niezmiernie wielka różnorodność form tych inwersorów; łatwo się przekonać, że dla danej potęgi istnieje ∞^3 rozmaitych form inwersora. Najprostsze są trzy następujące:

(Typ AA). Prosta r przechodzi przez punkt L, prosta r' przez punkt L' (fig. 7); forma ta szczególnie będzie dogodna wówczas, gdy punkty L i L' będą symetryczne względem prostej p; jest to powszechnie znany inwersor *Peaucellier'a*, złożony z dwóch inwersorów niezupełnych typu A.

(*Typ AB*). Prosta r przechodzi przez punkt L; prosta r' równoległa do prostej LM ma odcinek PQ w punkcie O podzielony na połowy (fig. 8); inwersor składa się z dwóch inwersorów niezupełnych: jeden typu A, drugi typu B. Przez zastąpienie drążka

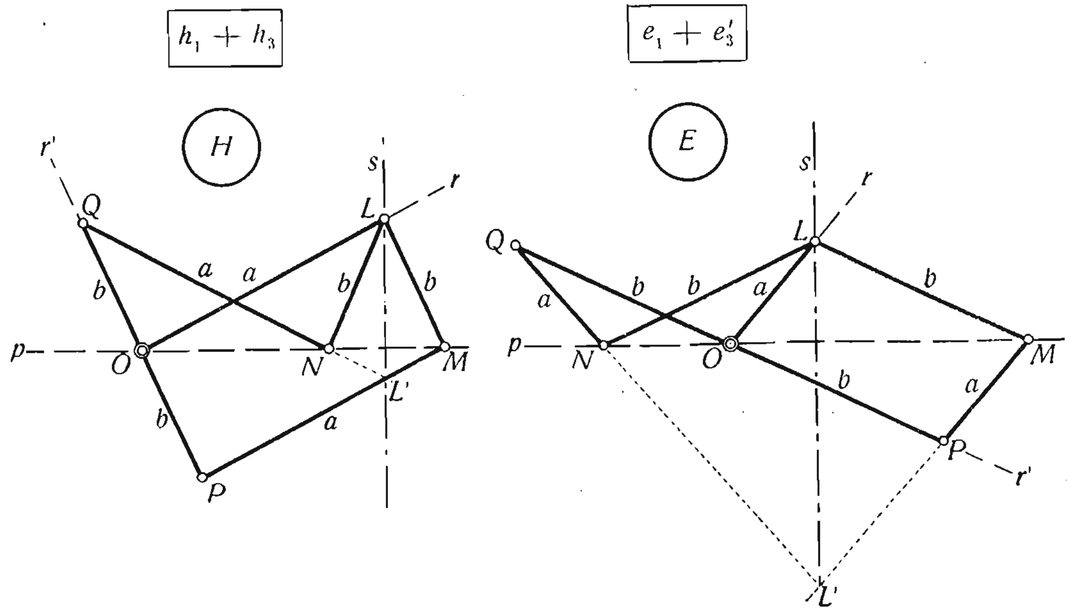

Fig. 8.

OL, albo drążka PM, równoległym do niego i równym mu drążkiem QR otrzymujemy dwie ciekawe modyfikacje tego typu (fig. 9 i 10).

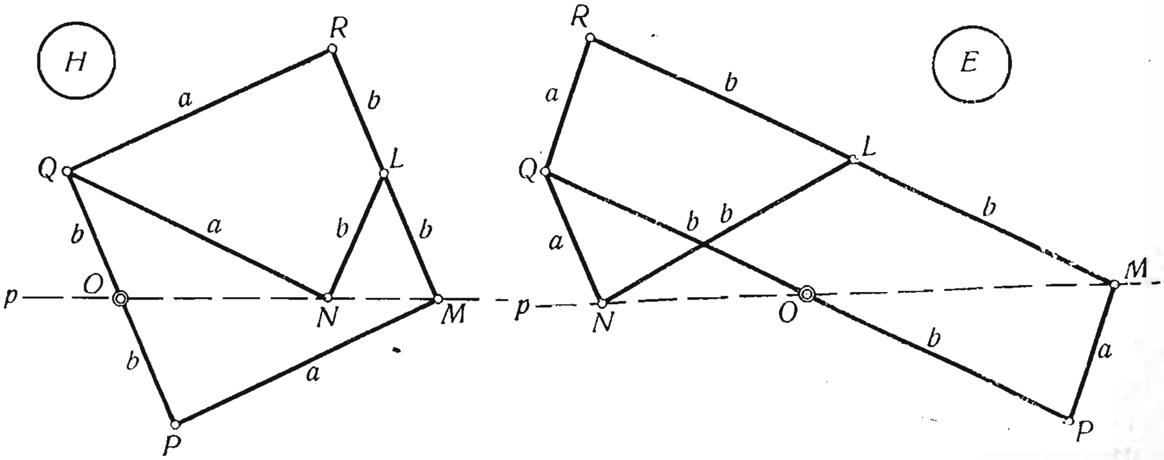

Fig. 9.

(*Typ BB*). Zarówno punkty L i L', jak proste r i r' są symetryczne względem prostej p, — przytem punkt O jest środkiem zarówno odcinka PQ, jak odcinka $P'Q'$

(Perrolaz, fig. 11*)*. Inwersor ten składa się z dwóch równych i symetrycznie względem prostej *p* położonych inwersorów niezupełnych typu *B*.

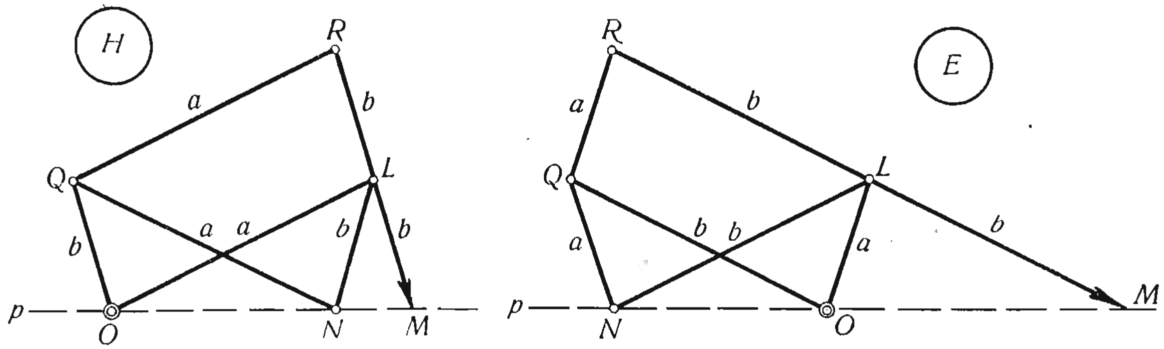

Fig. 10.

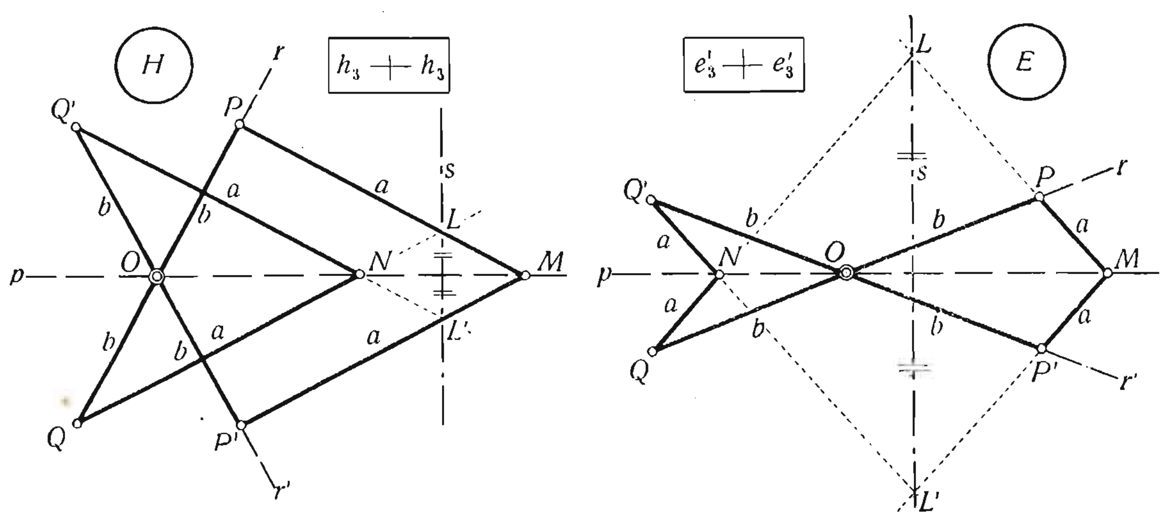

Fig. 11.

Z tych trzech najprostszych form na uwagę zasługuje zwłaszcza forma *AB* i jej modyfikacje (fig. 8, 9, 10), gdyż ma ona „martwe" położenie jedynie w przypadku granicznym, gdy cały przyrząd układa się na jednej prostej.

Sur la construction des inverseurs.

RÉSUMÉ.

On appelle *inverseur* un système articulé plan, déformable de telle sorte que trois points O, M, N, liés à trois différentes tiges, restent toujours en ligne droite et donnent le produit constant $OM \cdot ON$; la valeur constante, positive ou négative, de ce produit s'appelle la *puissance* de l'inverseur.

Si l'on fixe le point O et si l'on asujettit le point M à décrire une courbe quelconque, le point N décrit la courbe inverse à la première, O étant le centre d'inversion. L'inverseur peut donc transformer le mouvement circulaire en mouvement rectiligne ou inversement.

On connaît depuis longtemps les inverseurs de Peaucellier (Fig. 7), de Hart (Fig. 5) et de Perrolaz (Fig. 11); je me propose ici de démontrer qu'il existe une infinité des autres inverseurs, construits toujours sur un seul principe général.

Il résulte de la définition même d'inverseur que sa forme dépend d'un seul paramètre, — or les plus simples systèmes articulés dont la forme dépend d'un seul paramètre sont les quadrilatères articulés; en effet tout inverseur sera composé ou d'un seul quadritatère articulé (inverseurs à quatre tiges) ou bien de deux quadrilatères articulés, liés entre eux de manière que deux cotés adjacents de l'un sont invariablement liés aux deux cotés adjacents de l'autre (inverseurs à six tiges).

Or, si l'on renonce au principe de la déformation à un seul paramètre, on peut indiquer les appareils beaucoup plus simples, composés de trois tiges seulement dont les points O, M, N, appartenant chacun à l'autre tige, conservent le produit constant $OM \cdot ON$, — *à condition que ces points restent en ligne droite.* Ces appareils, que j'appelle *inverseurs incomplets*, peuvent présenter deux formes seulement A et B.

La forme A (Fig. 1) est composée de tiges OL, LM, LN articulées par leur extremité commune L, — si les longueurs de ces tiges sont a, b, b et les extrémités O, M, N glissent sur une droite, le produit $OM \cdot ON$ possède la valeur constante $a^2 - b^2$.

La forme B (Fig. 2) est composée de tiges MP, PQ, QN articulées entre elles dans l'ordre cité; si l'on prend sur la droite PQ le point O de sorte que

$$\frac{QO}{OP} = \frac{QN}{MP} = m$$

et si les points O, M, N sont en ligne droite, on trouve facilement

$$OM \cdot ON = m\,(MP^2 - OP^2) \quad \text{ou} \quad m\,(OP^2 - MP^2)$$

suivant que le point O est intérieur ou extérieur au segment PQ.

Pour une valeur donnée du produit $OM \cdot ON$ on peut construire une infinité des inverseurs incomplets de la forme B (Fig. 3): si O, M, N sont trois points en ligne droite tels que le produit $OM \cdot ON$ a la valeur donnée, on mène du point O une sécante quelconque d'un triangle isocèle LMN construit sur la base MN. Si la sécante issue du point O passe par le sommet L de ce triangle, on retombe sur la forme A qui est par conséquent un cas spécial de la forme générale B.

Pour arriver maintenant à l'inverseur „complet" il faudra ajouter à l'inverseur incomplet un dispositif ayant pour but de retenir les points O, M, N en ligne droite.

Le plus simple dispositif de ce genre est un autre inverseur incomplet de la même puissance; — je dis que *tout inverseur „complet" peut être composé de deux inverseurs „incomplets" de la même puissance.*

Or cette composition peut être effectuée de deux manières: la premiére nous conduit à l'inverseur de *Hart*, composé de quatre tiges seulement (Fig. 5), l'autre donne une infinité des inverseurs à six tiges (Fig. 6) dont les plus connus sont les inverseurs de *Peaucellier* (Ffg. 7) et de *Perrolaz* (Fig. 11). En même temps on arrive aux formes nouvelles (Fig. 8, 9, 10) qui sont tout aussi simples, mais ne présentent pas de „positions mortes" (sauf les cas limites quand les six tiges de l'appareil se couchent sur une même droite).